

MODELO HISTERÉTICO DE BOUC-WEN-FUNG
PARA DETERMINAÇÃO DA ENERGIA DISSIPADA EM BIOMATERIAISBouc-Wen-Fung hysteretic model for the determination
of dissipated energy in biomaterials

ISSN: 2178-7514

Vol. 18 | Nº. 3 | Ano 2026

Guanis de Barros Vilela Junior¹; Ricardo Pablo Passos¹; Raul Marcel Casagrande^{2,3,4}<https://www.cpaqv.org>

RESUMO

Introdução: A histerese é um fenômeno físico que ocorre quando a resposta de um sistema a uma ação externa variável depende do sentido desta variação, isto é, tem um valor quando a ação está crescendo e um outro valor quando a ação está decrescendo em uma direção, por exemplo, o loading e o unloading de uma força em um tendão. O modelo híbrido de Bouc-Wen-Fung (BWF) pode ser uma ferramenta relevante para a consolidação do gêmeo digital, ou seja, para ser ambiente de ensaios in silico, antes de intervenções in vivo. **Objetivo:** apresentar o BWF e comparar nove cenários distintos para obtenção da energia dissipada em situações que apresentem histerese, hiperelasticidade e amortecimento viscoso. **Métodos:** o modelo BWF foi desenvolvido em Python a partir de parâmetros como amplitude (mm), frequência loading-unloading (Hz), viscosidade (Pa.s), dentre outros. Nos nove cenários essas variáveis foram alteradas para comparação da energia dissipada entre eles. **Resultados:** O modelo BWF demonstrou eficácia na reprodução das características mecânicas de biomateriais. Estatisticamente, a energia dissipada é governada por frequência, amplitude e viscosidade ($P < 0.001$), com os parâmetros de Fung exercendo influência não significativa nos cenários testados. A interpretação física sugere que a natureza hiperelástica limita a contribuição destes parâmetros à dissipação total, indicando a necessidade de simulações complementares para isolar o efeito da compressão.

Palavras-chave: Modelo bouc-wen-fung; biomecânica tensegráfica; energia dissipada.

ABSTRACT

Introduction: Hysteresis is a physical phenomenon wherein a system's response to an external stimulus depends on the direction of change, yielding different values during loading and unloading phases, such as in tendon biomechanics. The hybrid Bouc-Wen-Fung (BWF) model represents a valuable tool for advancing digital twin technology, serving as an in silico testing environment prior to in vivo interventions. **Objective:** To introduce the BWF model and compare nine distinct scenarios to quantify energy dissipation under conditions exhibiting hysteresis, hyperelasticity, and viscous damping. **Methods:** The BWF model was implemented in Python, incorporating parameters such as amplitude (mm), loading-unloading frequency (Hz), and dynamic viscosity (Pa.s). These variables were systematically varied across nine scenarios to assess and compare the resulting energy dissipation. **Results:** The BWF model was effective in reproducing the mechanical behavior of biomaterials. Statistically, energy dissipation was primarily governed by frequency, amplitude, and viscosity ($p < 0.001$), whereas the Fung parameters exhibited no significant influence in the tested scenarios. This suggests that the hyperelastic nature of the material limits the contribution of these parameters to total energy dissipation, indicating the need for complementary simulations to isolate compressive effects.

Keywords: Bouc-wen-fung model; tensegrity biomechanics; dissipated energy.

1. International Society of Human Movement Sciences ISHMS.
2. Instituto Jundiaense de Ortopedia e Traumatologia.
3. Faculdade de Medicina de Jundiaí.
4. Hospital São Vicente de Paulo - Jundiaí.

Autor de correspondência

Guanis de Barros Vilela Junior - guanis@gmail.com

INTRODUÇÃO

A histerese é um fenômeno físico que ocorre quando a resposta de um sistema a uma ação externa variável depende do sentido desta variação, isto é, tem um valor quando a ação está crescendo e um outro valor quando a ação está decrescendo. É bastante comum em biomateriais, por exemplo, o loading e o unloading de uma força em um tendão. Ou seja, o estado atual de um sistema depende não apenas das condições de carregamento instantâneas, mas também do seu histórico de deformação ou tensão. Em biomecânica e na mecânica dos tecidos moles, ela se manifesta classicamente como a divergência entre as curvas de carregamento e descarregamento em ensaios cíclicos de tensão-deformação.

É importante deixar claro que um modelo é uma caricatura da realidade, mas que pode ser útil para a compreensão dos complexos fenômenos não-lineares que regem os sistemas biológicos.

O Modelo Bouc-Wen-Fung (BWF)

O Modelo BWF aqui utilizado, é a associação do modelo histerético proposto por Bouc e Wen e do modelo hiperelástico de Fung^(1,2). Em sua formulação fenomenológica básica, simula as deformações linearmente, sendo constituído por equações diferenciais escalares. Isso significa que ele correlaciona uma magnitude escalar de deformação (como o alongamento ou compressão ao longo de um único eixo) com uma magnitude escalar de tensão ou força. Matematicamente, o modelo Bouc-

Wen pode ser representado por duas equações: a da força restauradora, que associa um elemento elástico linear e um inelástico histerético:

$$f_r(t) = \alpha kx(t) + (1 - \alpha)Dkz(t)$$

Onde, $x(t)$ é a deformação ou deslocamento de entrada do sistema, k é a rigidez inicial, α representa a razão entre a rigidez pós-escoamento (plástica) e a rigidez pré-escoamento (elástica), D é o deslocamento de escoamento do sistema e $Z(t)$ é a variável histerética interna e adimensional (latente) responsável por armazenar a memória do histórico de deformação.

A segunda é a equação diferencial de estado não linear de primeira ordem que rege a evolução da variável de histerese $z(t)$ ao longo do tempo, representada por:

$$\dot{z}(t) = D^{-1} (A\dot{x}(t) - \beta|\dot{x}(t)||z(t)|^{n-1}z(t) - \gamma\dot{x}(t)|z(t)|^n)$$

Onde, A , b e g são parâmetros adimensionais que controlam a amplitude, a forma e a escala do loop de histerese e $n > 0$ é o expoente que dita a suavidade de transição entre o regime elástico (pré-escoamento) e o plástico (pós-escoamento). Valores baixos de n produzem transições suaves, enquanto valores elevados ($n \rightarrow \infty$) tornam a transição abrupta, assemelhando-se a um modelo bilinear clássico. Por ter uma abordagem fenomenológica o modelo original de Bouc-Wen exige restrições em seus parâmetros para que mantenha consistência com as leis da física, sendo necessário o ajuste de curvas matemáticas para reproduzir resultados

experimentais^(1,2,3). Portanto, os pressupostos físicos do modelo são:

1) Independência de Taxa (Rate-Independence), ou seja, a histerese verdadeira é caracterizada como um efeito de memória onde o gráfico de força-deslocamento independe da taxa com que a carga é aplicada (independente do tempo físico).

2) Ausência de Limite Elástico Verdadeiro, pois de acordo com os princípios da plasticidade clássica, o modelo Bouc-Wen baseia-se na teoria endocronica da plasticidade (que descarta o conceito rígido de uma superfície de escoamento), garantindo que a deformação inelástica começa imediatamente ao menor deslocamento infinitesimal, sendo apenas quase-linear para movimentos extremamente pequenos.

3) Consistência termodinâmica e estabilidade física de entrada e saída, para que o modelo respeite a segunda lei da termodinâmica (dissipação de energia) e garanta estabilidade física de entrada e saída (BIBO), os parâmetros devem satisfazer a restrições estritas propostas por Ikhoulane e Rodella, ou seja, nas equações supracitadas $A > 0$, $b + g > 0$ e $b \geq g$; isso garante a validade termodinâmica do modelo^(4,5,6).

4) Inconsistências mecânicas do modelo original que apresenta limitações físicas como desvio de deslocamento (drift) sob carregamento assimétrico e relaxação de força indevida, violando os postulados de plasticidade. Para contornar essa limitação recorreremos a um modelo híbrido que associa a hiperelasticidade dos tecidos

moles (presente nos biomateriais) proposto por Fung que descreve a elasticidade não linear não dissipativa do modelo. Essa hiperelasticidade de Fung pode ser expressa pela equação:

$$s = AFung \cdot (\exp(BFung \cdot X^2) - 1)$$

Onde, $AFung$ é a constante de tensão e $BFung$ é a constante de não linearidade do sistema e o amortecimento viscoso ($s_{visco} = h_{visco} \cdot (dx/dt)$).

Portanto, o Modelo Bouc-Wen Fung (BWF) aqui proposto, possui três dimensões, a histerética, a hiperelástica e a de amortecimento viscoso, ou seja:

$$\sigma_{total} = f(z) + g(x) + h(\dot{x})$$

Onde, $f(z)$ representa a dissipação histerética independente da taxa (Bouc-Wen). Esta componente é responsável por introduzir a plasticidade e o atrito inelástico que dão forma ao laço de histerese. Fisicamente representa o deslizamento interno entre as fibras microscópicas de colágeno, as perdas por deformação plástica residual e o rearranjo da microestrutura do tecido biológico quando submetido a carregamento cíclico^(7,8,9). Como a histerese pura do Bouc-Wen é independente da taxa (rate-independent), o loop se mantém estável mesmo se o ciclo de carregamento for executado de forma extremamente lenta.

A resposta hiperelástica não linear (Fung), $g(x)$, descreve o comportamento elástico puro e conservativo (não dissipativo) do material sob grandes deformações. Fisicamente, representa os tecidos moles do corpo humano (como pele, artérias, tendões, fáscia e músculos) que são compostos por matrizes elastômero-colagênicas.

Sob baixa tensão, as fibras elásticas de elastina esticam facilmente; sob altas-tensões, as fibras rígidas de colágeno são progressivamente recrutadas, provocando um endurecimento abrupto (strain-stiffening). Esse comportamento hiperelástico de Fung captura matematicamente essa resposta não linear por meio de uma função exponencial de densidade de energia de deformação. Como ela é puramente elástica, essa força depende estritamente do deslocamento ou deformação instantânea x , sem gerar dissipação de energia ou loops^(10,11,12).

Por fim, $h(\dot{x})$ é a componente viscoelástica dependente da velocidade (damping) que descreve o amortecimento viscoso de um sistema biológico, ou seja, fisicamente representa o comportamento viscoelástico devido à alta presença de água e fluidos intersticiais que fluem através da matriz sólida extracelular sob compressão ou tração.

Isso garante que o material apresente maior rigidez e maior dissipação quando submetido a carregamentos rápidos ou impactos.

MÉTODOS

Para implementar o modelo BWF foi desenvolvido um algoritmo em Python no qual foi implementado um painel de setup para as seguintes variáveis do modelo: Frequência, Amplitude, Viscosidade, FungTração e FungCompr, para calcular a energia dissipada. A tabela 1 mostra os valores dessas variáveis nos diferentes nove cenários e a energia dissipada em cada um deles, observe-se que a coluna numérica à esquerda os valores se repetem, pois foram utilizados como referências para as comparações, as linhas na cor cinza mostram alterações nas variáveis^(13,14,15).

Tabela 1 – Caracterização dos nove cenários no Modelo BWF

Cenário	Frequência (Hz)	Amplitude (mm)	Viscosidade (Pa·s)	Tensão de Fung (kPa)	Compressão de Fung (kPa)	Energia Dissipada (a.u.)
1 (Ref.)	1.0	2.0	2.0	1.5	0.3	189.07
2	2.0	2.0	2.0	1.5	0.3	346.98
3	3.0	2.0	2.0	1.5	0.3	501.74
4	1.0	2.0	4.0	1.5	0.3	346.98
5	1.0	2.0	6.0	1.5	0.3	504.88
6	1.0	2.0	4.0	1.0	0.3	346.98
7	1.0	2.0	6.0	0.5	0.3	504.88
8	1.0	1.0	2.0	1.5	0.3	43.50
9	1.0	2.5	2.0	1.5	0.3	296.99

No algoritmo foi utilizado o método Backward Differentiation Formula (BDF) com tolerâncias de 10^{-8} para prevenir falhas de convergência, pois sistemas histeréticos podem se tornar rígidos quando $n > 1$ ou quando há transições bruscas. O cálculo da energia dissipada foi obtido considerando a área do ciclo histerético completo. A inserção do modelo exponencial de Fung para a hiperelasticidade dos tecidos moles (tendões, fáscia, músculo passivo etc.) permitiu capturar o enrijecimento por deformação e sua característica curva em J. Foi realizada a estatística descritiva dos resultados obtidos nos cenários simulados. Foi realizada a regressão linear múltipla com a energia dissipada considerada a variável dependente.

RESULTADOS

Os gráficos dos loops de histerese nas figuras de 1 a 9 mostram à esquerda a tensão total,

o componente elástico (Fung), o componente B-W e a Energia dissipada em unidades arbitrárias, dado que se optou por manter a deformação em mm. À direita são mostrados nas mesmas figuras os gráficos da amplitude em função do tempo, estando delimitado por uma linha vertical vermelha o início do último ciclo completo utilizado no cálculo da energia dissipada.

O cenário 1 (figura 1) representa o contexto mais equilibrado das variáveis para valores factíveis para biomateriais em uma situação hipotética de otimização funcional do modelo, por este motivo será utilizado como referência exclusivamente para fins comparativos com os outros cenários.

Figura 1- Cenário 1: Freq= 1,0 Hz, Ampli= 2,0 mm, Viscosidade= 2,0 Pa.s, Fung tração= 1,50 kPa e Fung compressão= 0,30 kPa.

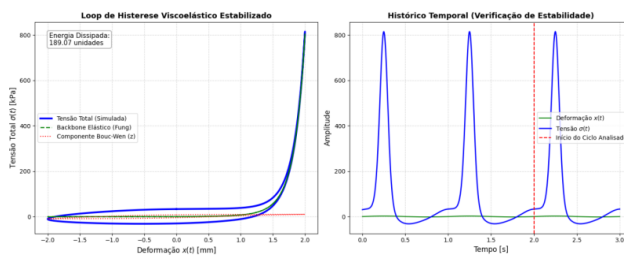


Figura 2- Cenário 2: Freq= 2,0 Hz, Ampli= 2,0 mm, Viscosidade= 2,0 Pa.s, Fung tração= 1,50kPa e Fung compressão= 0,30 kPa.

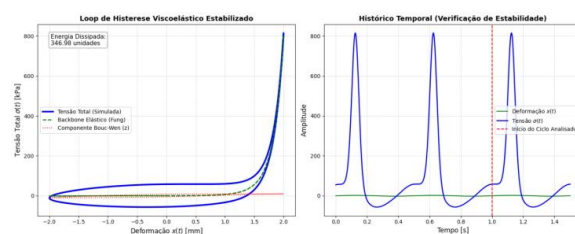
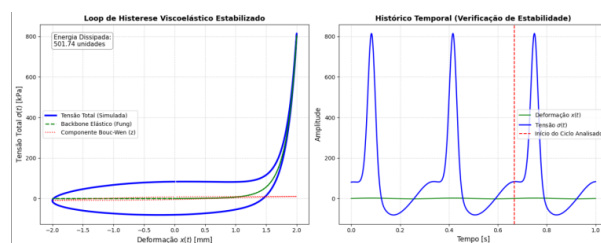


Figura 3- Cenário 3: Freq= 3,0 Hz, Ampli= 2,0 mm, Viscosidade= 2,0 Pa.s, Fung tração= 1,50kPa e Fung compressão= 0,30 kPa.



Nas figuras 1, 2 e 3 foram observadas variações histeréticas quando simuladas alterações exclusivamente nas frequências, 1, 2 e

3 Hz respectivamente, com aumento da energia dissipada com um aumento de 37,6% na energia dissipada entre 1 e 3 Hz.

Figura 4- Cenário 4: Freq= 1,0 Hz, Ampli= 2,0 mm, Viscosidade= 4,0 Pa.s, Fung tração= 1,50kPa e Fung compressão= 0,30kPa.

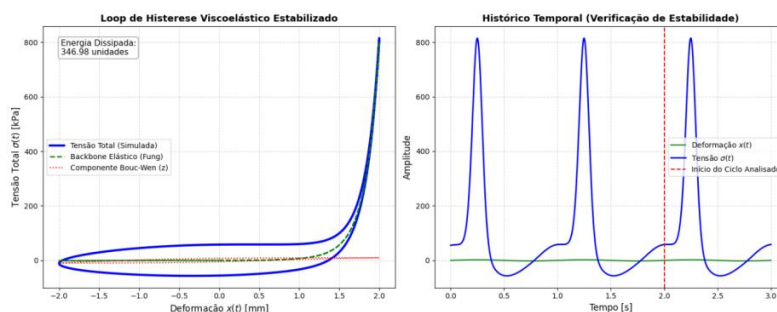
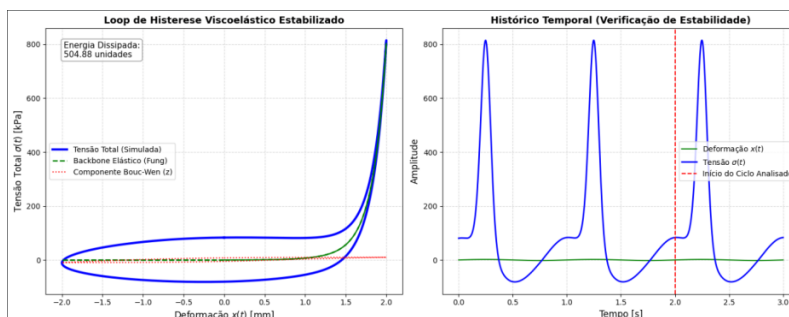


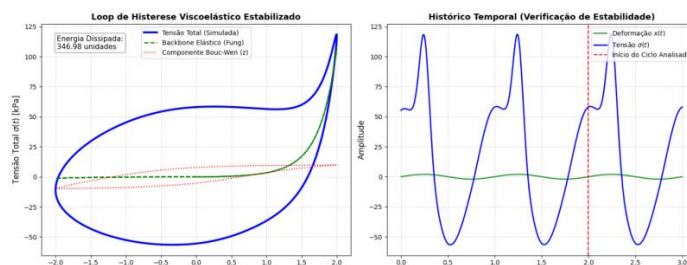
Figura 5- Cenário 5: Freq= 1,0 Hz, Ampli= 2,0 mm, Viscosidade= 6,0 Pa.s, Fung-tração= 1,50kPa e Fung compressão= 0,30kPa.



Nas figuras 1, 2, 3, 4 e 5, o gráfico à esquerda apresenta a forma de J do ciclo de histerese o que corrobora o comportamento hiperelástico desses cenários. Nos cenários 4

e 5 foram simuladas alterações exclusivamente na viscosidade, evidenciando a influência dela na energia dissipada com incremento de 37,4% entre os cenários 1 e 4.

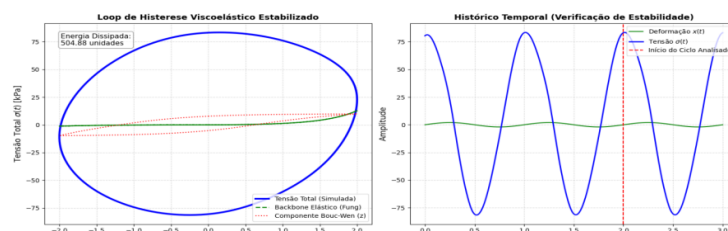
Figura 6- Cenário 6: Freq= 1,0 Hz, Ampli= 2,0 mm, Viscosidade= 4,0 Pa.s, Fung tração= 1,0kPa e Fung compressão= 0,30 kPa.



A figura 6, mostra a influência com alteração na viscosidade (duas vezes maior que no cenário 1) e redução de 33,33% na Fung tração, a energia dissipada foi de 346,98, com aumento de 54,4% em os cenários 1 e 6.

Essas alterações acarretaram uma mudança drástica na estrutura do loop de histerese com uma diminuição significativa da tensão total (~ 125 kPa) e amplitude quando comparadas com os cenários anteriores, como os encontrados nos cenários 1, 2 e 3.

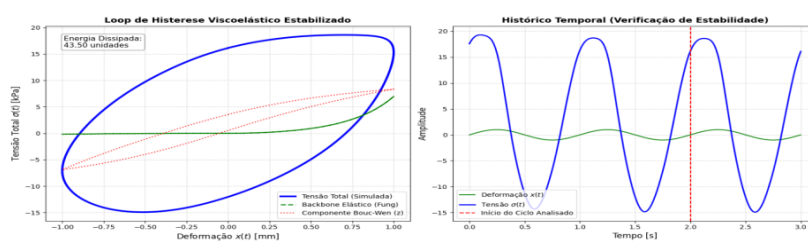
Figura 7- Cenário 7: Freq= 1,0 Hz, Ampli= 2,0 mm, Viscosidade= 6,0 Pa.s, Fung tração= 0,50 kPa e Fung compressão= 0,30 kPa.



O cenário 7, cujos gráficos são mostrados na figura 7, mostra que mesmo apresentando energia dissipada igual à do cenário 5 (504,88 ua) mas sem apresentar picos elevados na tensão total,

característicos de comportamentos hiperelásticos. Observa-se que a tensão máxima foi alcançada gradativamente chegando a ~ 75 kPa.

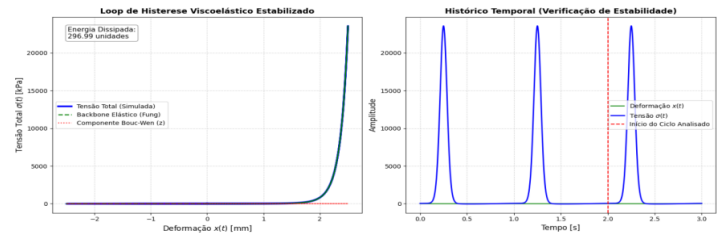
Figura 8- Cenário 8: Freq= 1,0 Hz, Ampli= 1,0 mm, Viscosidade= 2,0 Pa.s, Fung tração= 1,50 kPa e Fung compressão= 0,30 kPa.



No cenário 8 (figura 8) apenas a amplitude foi reduzida à metade em relação ao cenário 1, o que foi suficiente para a menor dissipação de

energia (43,50 ua) e tensão total máxima de ~ 18 kPa e compressão de módulo ~ 15 kPa.

Figura 9- Cenário 9: Freq= 1,0 Hz, Ampli= 2,5 mm, Viscosidade= 2,0 Pa.s, Fung tração= 1,50kPa e Fung compressão= 0,30 kPa.



Finalmente, o cenário 9 (figura 9) mostra que um aumento da amplitude para 2,5 mm, foi suficiente que a tensão total apresentasse comportamento quase assintótico a partir de deformação de 2 mm atingindo pico de

tensão total ~ 25000 kPa, cenário este que, hipoteticamente, equivaleria a danos estruturais agudos no tecido biológico.

Os resultados da análise estatística estão sumarizados na tabela 2.

Tabela 2 – Resultados da regressão linear múltipla

	Coefficiente	Erro Padrão	t	Valor p	IC [0,025 0,0975]
Frequência (Hz)	148,271	5,77	25,67	0,000	132,23 - 164,30
Amplitude (mm)	162,687	7,92	20,54	0,000	140,69 - 184,67
Viscosidade (Pa.s)	74,763	2,88	25,88	0,000	66,74 – 82,78
Fung- Trac (kPa)	-2,790	14,05	-0,19	0,852	-41,82 – 36,23
Fung- Compr (kPa)	-1386,50	97,40	-14,23	0,000	-1656,93 - -1116,08

Os resultados da regressão linear múltipla, com R2=0,988 e F=623,1 são possíveis indicadores da robustez do modelo BWF. Os testes da normalidade dos resíduos, Omnibus = 1,267 (Prob=0,531) e Jarque-Bera = 0,127 (Prob= 0,938) são maiores que 0,05. Isso significa que, para o presente modelo, não há evidência estatística para rejeitar a hipótese de que os

resíduos seguem uma distribuição normal. Isso é importante para a confiabilidade dos resultados dos testes estatísticos realizados.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados das simulações demonstram que o modelo BWF replica de forma satisfatória

os comportamentos histeréticos, hiperelásticos e viscosos observados em biomateriais. A análise estatística dos cenários revelou que a frequência, a amplitude e a viscosidade são as variáveis que exercem o impacto mais significativo sobre a energia dissipada neste modelo, com altos coeficientes de regressão e p-valores estatisticamente significantes ($P < 0.001$).

Em contraste, a variável Fung_Tração não demonstrou um impacto estatisticamente significativo na dissipação de energia nos cenários avaliados ($P = 0.852$). Quanto à variável Fung_Compressão, ela não variou nos nove cenários simulados, o que impossibilita a inferência estatística direta de seu impacto; embora o modelo de regressão tenha indicado um coeficiente elevado e um p-valor baixo, essa significância é um artefato da constância do parâmetro e não deve ser interpretada como um efeito real nesse conjunto de dados.

Fisicamente, a observação de que as variáveis de Fung (especialmente a de tração) podem ter um impacto limitado na dissipação total de energia pode estar associada à característica hiperelástica do material, onde a estabilização quase assintótica da deformação ocorre em uma porção inicial do ciclo histerético (inferior a ~15%). Contudo, para uma avaliação robusta do real impacto e da não-significância de Fung_Compressão, são necessárias simulações futuras com variação controlada deste parâmetro.

REFERÊNCIAS

- 1- Wen YK (1976) Method for random vibration of hysteretic systems. *J Eng Mech Div* 102(2):249–263. <https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0002106>
- 2- Bouc R (1967) Forced vibrations of mechanical systems with hysteresis. *Proc of the Fourth Conference on Nonlinear Oscillations, Prague, 1967*.
- 3- Fung, Yuan-Cheng. 1981. *Biomechanics mechanical properties of living tissues*. New York: Springer-Verlag.
- 4- Erlicher S, Point N (2003) Thermodynamic admissibility of Bouc-Wen type hysteresis models. *Comptes Rendus Mécanique* 332(1):51–57. <https://doi.org/10.1016/j.crme.2003.10.009>
- 5- Wang CH, Chang SY (2007) Development and validation of a generalized biaxial hysteresis model. *J Eng Mech* 133(2):141– 152. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2007\)133:2\(141\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2007)133:2(141))
- 6- Ikhrouane F (2022) A data-driven hysteresis model. *Struct Control Health Monitor*. <https://doi.org/10.1002/stc.2986>
- 7- Kim SY, Lee CH (2021) Nondimensionalized Bouc-Wen model with structural degradation for Kalman filter-based real-time monitoring. *Eng Struct* 244:112674. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.112674>
- 8- Heredia-Pérez, M., Alvarez, D. A., & Bedoya-Ruiz, D. (2026). A State-of-the-Art Review of the Bouc-Wen Class Model of Hysteresis: Origin, Evolution and Current State: M. Heredia-Pérez et al. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 33(1), 1-51.
- 9- Thai, M. T., Phan, P. T., Hoang, T. T., Low, H., Lovell, N. H., & Do, T. N. (2021). Design, fabrication, and hysteresis modeling of soft microtubule artificial muscle (SMAM) for medical applications. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 6(3), 5089-5096.
- 10- Qian, R., Wang, G., Jiang, M., Zhang, Y., Zhai, R., & Wang, W. (2024, August). Frequency-dependent Bouc–Wen modeling of magnetorheological damper using harmonic balance approach. In *Actuators* (Vol. 13, No. 8, p. 297). MDPI.
- 11- Genesio, R., & Tesi, A. (1992). Harmonic balance methods for the analysis of chaotic dynamics in nonlinear systems. *Automatica*, 28(3), 531-548.
- 12- Niola V, Palli G, Strano S et al (2019) Nonlinear estimation of the Bouc-Wen model with parameter boundaries: application to seismic isolators. *Comput Struct* 222:1–9. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2019.06.006>
- 13- Sun, S.; Yang, J.; Li, W.; Deng, H.; Du, H.; Alici, G. (2015) Development of a novel variable stiffness and damping magnetorheological fluid damper. *Smart Mater. Struct.* 24, 085021.
- 14- Noël JP, Schoukens M (2016) Hysteretic benchmark with a dynamic nonlinearity. In: *Workshop on nonlinear system identification Benchmarks*, pp 7–14.
- 15- Julio García Ruíz, M., & Yarime Suárez González, L. (2006). Comparison of hyperelastic material models in the analysis of fabrics. *International journal of clothing science and technology*, 18(5), 314-325.

Observação:

- 1) Os/(as) autores/(as) declaram não existir conflitos de interesses de qualquer natureza.

2) Os autores declaram, se for o caso, estarem de acordo com as políticas de uso ético da Inteligência Artificial, reportando o mesmo nos agradecimentos ou nos métodos do artigo, em consonância com as normativas da WAME (World Association Medical Editors).



International Society of Human Movement Sciences - ISHMS

<https://www.ishms.net/>



Center of Advanced Researches in Quality of Life - CPAQV

<https://revista.cpaqv.org/index.php/CPAQV>

Nosso Instagram



<https://www.instagram.com/revistacpaqv>